Istituto Superiore "XXV aprile" Pontedera - Prof. Francesco Daddi

Esercizi su aree e volumi - 5^aE Scientifico 03/02/2014

Esercizio 1. Si determini il volume del solido ottenuto ruotando attorno all'asse x la regione di piano limitata dalla funzione $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ e dall'asse x.
Come si interpreta il risultato?

Esercizio 2. Si determini la superficie del solido ottenuto ruotando attorno all'asse x la regione di piano limitata dalla funzione $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ e dall'asse x.
Come si interpreta il risultato?

Esercizio 3. Si determini il volume del solido ottenuto ruotando attorno all'asse y la regione di piano limitata dalle funzioni $f(x) = \sqrt{4-(x-5)^2}$ e $g(x) = -\sqrt{4-(x-5)^2}$.
Il solido prende il nome di *toro*.

Esercizio 4. Sono assegnate le curve $\gamma : x^2 = 4\,(x-y)$ e $r : 4\,y = x+6$.
Si determini l'area della regione finita di piano racchiusa da γ e dalla retta s, simmetrica di r rispetto all'asse x.
Si determini il valore di c per il quale la retta $y = c$ divide a metà l'area della regione $\mathcal{S}$ del I quadrante compresa tra γ e l'asse x.
Si determini il volume del solido di base $\mathcal{S}$ le cui sezioni ottenute con piani ortogonali all'asse x sono quadrati. **(Maturità PNI 2005)**

Esercizio 5. Si consideri la regione $\mathcal{R}$ è delimitata da $y = 2\,x$ e $y = x^2$. $\mathcal{R}$ è la base di un solido $\mathcal{W}$ le cui sezioni, ottenute tagliando $\mathcal{W}$ con piani perpendicolari all'asse x, hanno area $A(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\,x\right)$. Si determini il volume di $\mathcal{W}$. **(Scuole all'Estero - Europa 2011)**

Esercizio 6. Si consideri la curva $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
Si calcoli l'area della regione $\mathcal{A}_k$, delimitata dalla curva, dall'asse y, dall'asintoto orizzontale destro e dalla retta $x = k$ con $k > 0$. Si calcoli poi il limite di $\mathcal{A}_k$ quando $k \to +\infty$.
Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva, dalla tangente inflessionale e dalla retta $x = 1$. **(Maturità 2011 suppletiva)**

Esercizio 7. Si provi che l'equazione: $x^{2011} + 2011\,x + 12 = 0$ ha una sola radice compresa fra -1 e 0.
(Maturità 2011)

Esercizio 8. Si considerino le funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da: $f(x) = x^3 - 4\,x$ e $g(x) = \sin(\pi\,x)$. Sia $\mathcal{R}$ la regione del piano delimitata dalle due curve sull'intervallo $[0;2]$.
Si calcoli l'area di $\mathcal{R}$.
La regione $\mathcal{R}$ rappresenta la superficie libera dell'acqua contenuta in una vasca. In ogni punto di $\mathcal{R}$ a distanza x dall'asse y la misura della profondità dell'acqua nella vasca è data da $h(x) = 3 - x$. Quale integrale definito dà il volume dell'acqua? Supposte le misure in metri, quanti litri di acqua contiene la vasca? **(Maturità 2011)**

Esercizio 9. Sia $\mathcal{R}$ la regione delimitata dalla curva $y = x^3$, dall'asse x e dalla retta $x = 2$ e sia $\mathcal{W}$ il solido ottenuto dalla rotazione di $\mathcal{R}$ attorno all'asse y. Si calcoli il volume di $\mathcal{W}$. **(Maturità 2011)**

Esercizio 10. La retta di equazione $x = 8$ seca la parabola di equazione $x = y^2 - 4\,y + 3$ nei punti A e B. Fra i rettangoli inscritti nel segmento parabolico di base AB si determini quello che genera il cilindro di volume massimo in una rotazione di $180°$ intorno all'asse della parabola.
(Maturità 2011 suppletiva)

Esercizio 11. Sia $\mathcal{R}$ la regione delimitata, per $x \in [0, \pi]$, dalla curva $y = \sin x$ e dall'asse x e sia $\mathcal{W}$ il solido ottenuto dalla rotazione di $\mathcal{R}$ attorno all'asse y. Si calcoli il volume di $\mathcal{W}$.
(Maturità PNI 2011)

Esercizio 12. Si consideri la funzione $f(x) = (3 - x)\sqrt{x + 3}$. Si scriva l'equazione della tangente t alla curva nel punto di intersezione con l'asse e si calcoli l'area del triangolo che essa forma con gli assi cartesiani. Si calcoli il volume del cono $\mathcal{S}$ generato da una rotazione completa attorno all'asse x del succitato triangolo e il volume del solido $\mathcal{S}'$ generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano, situata nel I quadrante, limitata dalla curva e dagli assi cartesiani. **(PNI 2011 suppletiva)**

Esercizio 13. Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, ortogonale e monometrico, si consideri la regione $\mathcal{R}$, finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola γ d'equazione $y = 6 - x^2$.
1. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di $\mathcal{R}$ attorno all'asse y.
2. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di $\mathcal{R}$ attorno alla retta $y = 6$.
3. Si determini il valore di k per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di $\mathcal{R}$.
4. Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia $A(t)$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a γ nel suo punto di ascissa t. Si determini $A(1)$. 5. Si determini il valore di t per il quale $A(t)$ è minima.
(Maturità 2005)

Esercizio 14. Si calcoli il volume del solido generato in una rotazione completa attorno all'asse delle x della regione finita di piano delimitata dalla curva $y = \dfrac{2}{x}$ e dalla retta di equazione $y = -x + 3$.
(Maturità 2007 PNI suppletiva)

Esercizio 15. Si consideri la funzione $f(x) = \ln x$. Sia $\mathcal{D}$ la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, dal grafico di $f(x)$ e dalla retta di equazione $y = 1$. Si calcoli l'area di $\mathcal{D}$. Si calcoli il volume del solido generato da $\mathcal{D}$ nella rotazione completa attorno alla retta di equazione $x = -1$.
(Maturità 2009)

Esercizio 16. Sia data la funzione $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$. Si calcoli l'area della parte di piano $\mathcal{R}$ racchiusa dal grafico e dal semiasse positivo delle ascisse. La regione $\mathcal{R}$ genera, nella rotazione attorno all'asse delle ascisse, un solido $\mathcal{S}$. In $\mathcal{S}$ si inscriva un cono circolare retto con vertice nell'origine. Si determinino raggio e altezza del cono, affinché il suo volume sia massimo. **(Maturità 2010 suppletiva)**

Esercizio 17. Nel piano riferito ad un sistema Oxy di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole di equazioni: $y^2 = 2x$ e $x^2 = y$.
Sia $\mathcal{D}$ la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi O e A. Si determini la retta r, parallela all'asse x, che stacca su $\mathcal{D}$ il segmento di lunghezza massima.
Si consideri il solido $\mathcal{W}$ ottenuto dalla rotazione di $\mathcal{D}$ intorno all'asse x. Se si taglia $\mathcal{W}$ con piani ortogonali all'asse x, quale forma hanno le sezioni ottenute? Si calcoli il volume di $\mathcal{W}$.
(Maturità 2010 PNI)

Esercizio 18. In un sistema di assi cartesiani ortogonali è assegnata la famiglia di linee di equazione $ax^2 + (1 - 3a)x - y - 3 = 0$. Si individuino in tale famiglia la retta r e le due parabole γ' e γ'' che con la stessa retta formano ciascuna una regione finita di piano avente area $\dfrac{9}{2}$. Si dimostri che le due parabole ottenute sono congruenti. Si scriva inoltre l'equazione della retta parallela all'asse delle ordinate tale che le tangenti a γ' e γ'' nei punti di intersezione di essa con le stesse parabole siano parallele. **(Maturità 1987)**

Esercizio 19. Si consideri la regione $\mathcal{R}$ delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$.
Si determini il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse x.
Si determini il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse y.
(Maturità 2010 PNI modif.)

Esercizio 20. Nel piano cartesiano Oxy è dato il cerchio C con centro nell'origine e raggio $r = 3$; siano $P(0, 3)$ e $Q(2, \sqrt{5})$ punti di C. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x del quadrilatero mistilineo $PORQ$ (con R proiezione di Q sull'asse x).
(Maturitò 2010 PNI suppletiva)

Esercizio 21. La regione $\mathcal{R}$ delimitata dal grafico di $y = 2\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 1$ è la base di un solido $\mathcal{S}$ le cui sezioni, ottenute tagliando $\mathcal{S}$ con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di $\mathcal{S}$. **(Maturità 2007)**

Esercizio 22. La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione $y = \ln x$ e l'asse x, con $1 \le x \le e$, è base di un solido $\mathcal{S}$ le cui sezioni, ottenute tagliando $\mathcal{S}$ con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Si calcoli il volume di $\mathcal{S}$ e se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2}. **(Maturità 2007 PNI)**

Esercizio 23. Un solido ha per base un cerchio di raggio 1. Ogni sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare ad un prefissato diametro è un triangolo equilatero. Si calcoli il volume del solido. **(Maturità 2008 PNI)**

Esercizio 24. Si sechi il solido di una sfera con un piano, in modo che il circolo massimo sia medio proporzionale fra le superficie appianate delle calotte nelle quali rimane divisa la sfera.
(Maturità 2008 suppletiva)

Esercizio 25. La regione finita di piano delimitata dalla curva di equazione $y = e^{x/2}(x + 1)$ e dall'asse x nell'intervallo $0 \le x \le 1$ è la base di un solido $\mathcal{S}$ le cui sezioni sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di $\mathcal{S}$. **(Maturità 2008 suppletiva)**

Esercizio 26. Su un piano orizzontale α si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è r e l'altezza $2r$, e una sfera di raggio r. A quale distanza x dal piano α bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale β perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?
(Maturità 2010 suppletiva)

Esercizio 27. La regione del I quadrante delimitata dall'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e dagli assi cartesiani è la base di un solido $\mathcal{F}$ le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse y sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di $\mathcal{F}$. **(Maturità 2011 PNI suppletiva)**

Esercizio 28. Si consideri la curva $y = \tan x + \cot x$. La regione finita di piano delimitata dalla curva e dall'asse x nell'intervallo $\dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{\pi}{3}$ è la base di un solido $\mathcal{S}$, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di $\mathcal{S}$.
(Maturità 2011 PNI suppletiva)

Esercizio 29. Dare un esempio di solido il cui volume è dato da $\int_0^1 \pi x^3\, dx$. **(Maturità 2003 PNI)**

Esercizio 30. Date le parabole $\gamma_1 : y = x^2$ e $\gamma_2 : y = -3x^2 + 8x$, si determini il valore di $k \in (0, 2)$ in modo che la regione finita di piano $\mathcal{R}_s$ delimitata dalle due parabole e dal semipiano $x \le k$ sia equivalente alla regione finita di piano $\mathcal{R}_d$ delimitata dalle due parabole e dal semipiano $x \ge k$.

Esercizio 31. Si determinino i valori di k in modo che la retta $y = kx$ divida la regione di piano limitata dalla parabola $y = -2x^2 - 4x$ e dall'asse delle ascisse in due regioni tali che il rapporto delle loro aree sia uguale a 7. [R. $k = -2$, $k = 2\sqrt[3]{7} - 4 \approx -0,174...$]

Esercizio 32. Si verifichi che l'area della regione $\mathcal{R}$ delimitata dalla curva $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, dalle rette $x = -1$ e $x = 1$ e dall'asse x è pari a $\frac{\pi}{2}$. Si approssimi l'integrale il metodo dei trapezi dividendo l'intervallo di integrazione in 10 sottointervalli e si dica come è possibile dare un'approssimazione di π.
Si determini poi la retta parallela all'asse x che forma con le rette suddette e con l'asse x un rettangolo equivalente alla regione $\mathcal{R}$.