Esercizi svolti sulle equazioni differenziali

Esercizio 3. *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y''' - 2\,y'' - y' + 2\,y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione caratteristica è

$$\lambda^3 - 2\,\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \qquad \text{da cui} \quad \lambda_1 = 1\ ;\ \lambda_2 = -1\ ;\ \lambda_3 = 2$$

l'integrale generale dell'equazione $y''' - 2\,y'' - y' + 2\,y = 0$ è

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2\,x}\ ;$$

imponendo che $y(0) = 2$ abbiamo

$$y(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad C_1 e^0 + C_2 e^{-0} + C_3 e^{2\cdot 0} = 2 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 + C_3 = 2$$

derivando l'integrale generale abbiamo

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2\,x} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + 2\,C_3 e^{2\,x}$$

quindi la seconda condizione $y'(0) = -1$ diventa:

$$y'(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad C_1 e^0 - C_2 e^{-0} + 2\,C_3 e^{2\cdot 0} = -1 \quad \Rightarrow \quad C_1 - C_2 + 2\,C_3 = -1\ ;$$

derivando ancora si ha

$$y''(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 4\,C_3 e^{2\,x}$$

per la terza ed ultima condizione $y''(0) = 1$ abbiamo

$$y''(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 e^0 + C_2 e^{-0} + 4\,C_3 e^{2\cdot 0} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 + 4\,C_3 = 1$$

dobbiamo quindi risolvere il sistema lineare seguente:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 2 \\ C_1 - C_2 + 2\,C_3 = -1 \\ C_1 + C_2 + 4\,C_3 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = \dfrac{4}{3} \\ C_3 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = e^x + \frac{4}{3}e^{-x} - \frac{1}{3}e^{2\,x}\ .$$