

## Esercizi di riepilogo sulle sfere

4<sup>a</sup>C Liceo Scientifico - 07/04/2014

**Esercizio 1.** Si determini l'equazione del piano tangente alla sfera  $S : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z - 15 = 0$  nel suo punto  $A(4, 2, -1)$ .

[R.  $2x + 5y - 18 = 0$ ]

**Esercizio 2.** Si determinino le equazioni dei piani tangenti alla sfera di centro  $(0, 0, 0)$  e raggio 1 e passanti per i punti  $A(-2, 1, 0)$  e  $B(1, 1, -1)$ .

[R.  $\pi_1 : y - 1 = 0$ ;  $\pi_2 : 2x - 3y + 6z + 7 = 0$ ]

**Esercizio 3.** Si determini l'equazione della sfera passante per il punto  $A(2, 1, -1)$  e tangente al piano  $\pi : x - y + 2z - 5 = 0$  nel suo punto  $T(3, 0, 1)$ .

[R.  $x^2 + y^2 + z^2 - 5x - y + 5 = 0$ ]

**Esercizio 4.** Si determinino le equazioni delle sfere tangenti nell'origine al piano  $z = 0$  e tangenti alla retta

$$r : \begin{cases} x = y \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} .$$

[R.  $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 + (4 - 2\sqrt{6})z = 0$ ;  $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 + (4 + 2\sqrt{6})z = 0$ ]

**Esercizio 5.** Si consideri la circonferenza  $\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$ . Qual è il suo centro? Ed il suo raggio?

Si determinino le equazioni delle sfere contenenti  $\gamma$  e tangenti al piano  $\pi : x - z - 2\sqrt{2} = 0$ .

[R. Il centro di  $\gamma$  è il punto di coordinate  $(1, 1, 1)$ ; il raggio di  $\gamma$  è uguale a 1. Le sfere richieste sono  $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ ,  $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z + 8 = 0$ . ]

**Esercizio 6.** Si determini l'equazione della sfera passante per i quattro punti  $P_1(1, 2, 0)$ ,  $P_2(-1, 0, 1)$ ,  $P_3(2, 1, -2)$ ,  $P_4(0, 0, -1)$ . Si risolva l'esercizio in due modi diversi.

[R.  $x^2 + y^2 + z^2 - 9x + 5y - 5z - 6 = 0$ ]

**Esercizio 7.** Si determinino le equazioni delle sfere aventi centro sulla retta  $r : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$  e tangenti

ai piani  $\alpha : x - 2y + z - 1 = 0$  e  $\beta : x + y - 2z + 2 = 0$ .

[R.  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z = 0$ ;  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + \frac{11}{6} = 0$ ]

**Esercizio 8.** Si determini l'equazione della sfera tangente all'asse  $x$  nel suo punto  $A(2, 0, 0)$  e passante per i punti  $P(1, -1, 0)$  e  $Q(-2, 0, 1)$ .

[R.  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 17z + 4 = 0$ ]

**Esercizio 9.** Si determini l'equazione della sfera passante per  $P(1, -2, -1)$ , avente centro sul piano  $\pi :$

$2x + y - z - 1 = 0$  e tangente alla retta  $r : \begin{cases} x + y = 2 \\ x - z = -1 \end{cases}$  nel punto  $T(1, 1, 2)$ .

[R.  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - z - 3 = 0$ ]

**Esercizio 10.** Si determini la retta  $r$  parallela al piano  $\pi : x - 2y + 4z = 7$  e tangente alla sfera di centro  $C(1, 0, -3)$  nel suo punto  $A(2, -2, -1)$ .

[R.  $r : \begin{cases} x - 2y + 2z - 4 = 0 \\ x - 2y + 4z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - 6 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} ]$

## Verifica di Matematica

4<sup>a</sup>C Liceo Scientifico - 14/04/2014

Nome e cognome \_\_\_\_\_

Punteggio di partenza: 1,0/10. Gli esercizi 1, 2, 3 sono obbligatori.

Lo studente deve scegliere **un solo esercizio** tra i rimanenti. Ogni esercizio vale 2,25/10.

**Esercizio 1.** Si determinino tutte le soluzioni complesse dell'equazione  $z^5 + 4i\bar{z}^3 = 0$ .

**Esercizio 2.** Si discuta, al variare del parametro reale  $k$ , il seguente sistema nelle incognite  $x, y, z$ :

$$\begin{cases} x + ky + z = k \\ kx + ky + z = -2 \\ x + ky + (k-1)z = k \end{cases} .$$

**Esercizio 3.** Si determinino le equazioni delle sfere tangenti alla retta  $r : \begin{cases} x = y \\ y = z - 2 \end{cases}$  nel punto

$T(1, 1, 3)$ , passanti per  $A(0, 2, 3)$  ed aventi raggio di lunghezza  $\sqrt{14}$ .

Si descriva poi l'intersezione delle due sfere ottenute.

**Esercizio 4.** Sono assegnate le due rette  $r : \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 4 \end{cases}$ ,  $s : \begin{cases} x + y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$ .

a) Si determini la retta perpendicolare ed incidente entrambe le rette  $r$  ed  $s$ .

b) Si determini, tra tutte le sfere tangenti ad entrambe le rette  $r$  ed  $s$ , quella avente raggio minimo.

**Esercizio 5.** Si considerino le sfere contenenti la circonferenza  $\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x = -y \end{cases}$ .

Tra di esse si determini quella tangente al piano  $\alpha : x + y + 2z - 4 = 0$ .

Quali sono le coordinate del punto  $T$  di tangenza?

**Esercizio 6.** Sono assegnate le due rette  $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 2t \end{cases}$  ed  $s : \begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = 2 \end{cases}$ .

a) Si dimostri che le rette  $r$  ed  $s$  sono incidenti, si determini il loro punto di intersezione  $P$  e si calcoli l'ampiezza dell'angolo acuto da esse formato.

b)\*\* Dopo aver determinato l'equazione del piano  $\pi$  contenente le rette  $r$  ed  $s$ , si determinino le equazioni delle rette bisettrici  $b_1$  e  $b_2$  degli angoli formati da  $r$  ed  $s$ .

---

## Verifica di Matematica

4<sup>a</sup>C Liceo Scientifico - assenti del 14/04/2014

Nome e cognome \_\_\_\_\_

Punteggio di partenza: 1,0/10. Gli esercizi 1, 2, 3 sono obbligatori.

Lo studente deve scegliere **un solo esercizio** tra i rimanenti. Ogni esercizio vale 2,25/10.

**Esercizio 1.** Si determinino tutte le soluzioni complesse dell'equazione  $|z|z^6 - i\bar{z}^2 = 0$ .

**Esercizio 2.** Si discuta, al variare del parametro reale  $k$ , il seguente sistema nelle incognite  $x, y, z$ :

$$\begin{cases} x + ky - kz = -k \\ kx + y - z = -1 \\ x - 2y + kz = 1 \end{cases} .$$

**Esercizio 3.** Si determini l'equazione della sfera tangente al piano  $\pi : x + y - z + 1 = 0$  nel punto  $T(-2, 1, 0)$  e tangente ulteriormente alla retta  $r : \begin{cases} x = z \\ y = 2 \end{cases}$ .

Si determinino le coordinate del punto di tangenza della sfera trovata con la retta  $r$ .

**Esercizio 4.** Si consideri la sfera  $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 12 = 0$  ed il piano  $\pi : x - y = 0$ . Si determinino le equazioni delle rette  $r$  ed  $s$  contenute nel piano  $\pi$ , passanti per il punto  $P(3, 3, 0)$  e tangenti alla sfera  $\mathcal{S}$ .

**Esercizio 5.** Sono assegnate le due rette  $r : \begin{cases} x + y = 7 \\ z = x - 2 \end{cases}$ ,  $s : \begin{cases} y = 2x \\ z = x + 2 \end{cases}$  ed il punto  $P(6, 8, 0)$ .

Si determini, se possibile, una retta passante per  $P$  ed incidente entrambe le rette  $r$  ed  $s$ .

**Esercizio 6.** Sono assegnate le due rette parallele  $r : \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$  ed  $s : \begin{cases} x = 8 \\ y = k \\ z = 0 \end{cases}$ .

Si determini il luogo geometrico dei centri delle sfere aventi raggio uguale a 5 e tangenti alle due rette  $r$  ed  $s$ .

Tra le sfere considerate si determinino quelle tangenti ulteriormente al piano  $\pi : x + 2y + 2z = 0$ .

---